1) Énergie cinétique réduite $x = \frac{T}{E_0}$ ← énergie au repos

$$x = \frac{T}{E_0} = \frac{T}{mc^2}$$

accélération ds $\vec{E}$

$dT = q\vec{E}.\vec{d\ell}$

$\Delta T = q\int_A^B \vec{E}\,\vec{d\ell} = -q(V_B - V_A)$

a) Relation $R = \frac{E_0}{qBc}\sqrt{x^2+2x}$

Dans les entrefers : PFD → $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ avec $\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$ ← Force de Laplace et $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ (invariant)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\gamma\frac{d\vec{v}}{dt} + m\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$$

or Force de Laplace ne travaille pas car $dT = \vec{F}.\vec{d\ell} = \vec{F}.\vec{v}\,dt$
$= q\underbrace{(\vec{v}\wedge\vec{B})}_{\perp\vec{v}}.\vec{v}\,dt = 0$

donc $v^2 = cste \Rightarrow \gamma = cste$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = m\gamma\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$$

Soit composante par composante
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix} = \frac{q}{m\gamma}\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\B\end{pmatrix} = \frac{q}{m\gamma}\begin{pmatrix}v_yB\\-v_xB\\0\end{pmatrix}$$
mvt plan

posons $\tilde{v} = v_x + iv_y$

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} + i\frac{dv_y}{dt} \Rightarrow \frac{d\tilde{v}}{dt} = \frac{qB}{m\gamma}(v_y - iv_x) = -i\underbrace{\frac{qB}{m\gamma}}_{\omega}\tilde{v}$$

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} = -i\omega\tilde{v} \Rightarrow \tilde{v} = Ce^{-i\omega t}$$

à $t=0$ $\tilde{v} = v_0$, $x=y=0$

donc $\begin{cases} v_x = v_0\cos(\omega t) \\ v_y = -v_0\sin(\omega t)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + c_x \\ y = \frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t) + c_y\end{cases}$ donc $\begin{cases} c_x = 0 \\ c_y = -\frac{v_0}{\omega}\end{cases}$

donc $\begin{cases} x = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) \\ y = \frac{v_0}{\omega}(\cos(\omega t) - 1)\end{cases}$ ⇒ eq d'1 cercle $x^2 + \left(y + \frac{v_0}{\omega}\right)^2 = R^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$

finalement $R = \dfrac{v_0}{\omega} = \dfrac{v_0 m \gamma}{qB} = \dfrac{p_0}{qB} \Rightarrow p_0 = qBR$

<u>Lien entre R et l'énergie cinétique réduite</u>

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \Rightarrow p^2c^2 = E^2 - m^2c^4$$
$$= (T+mc^2)^2 - m^2c^4$$
$$= T^2 + 2Tmc^2$$

or $x = \dfrac{T}{mc^2} \Rightarrow T = x\, mc^2$

$$\Rightarrow p^2c^2 = x^2m^2c^4 + 2x\, m^2c^4$$
$$= m^2c^4(x^2+2x)$$
$$pc = mc^2\sqrt{x^2+2x}$$
$$p = mc\sqrt{x^2+2x}$$

soit $qBR = mc\sqrt{x^2+2x}$

$$R = \frac{mc^2}{qBc}\sqrt{x^2+2x} = \frac{E_0}{qBc}\sqrt{x^2+2x} \quad \text{cqfd.}$$

b) <u>Fréquence ν de l'oscillateur chargé de $\vec{E}$ accélérateur en fonction de x</u>

$\vec{E}$ colinéaire à $\vec{p}$ pour que la particule puisse être accélérée

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{qB\,c^2}{\underbrace{m\gamma c^2}_{E}} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{qBc^2}{\underbrace{E}_{T+mc^2}} = \frac{qBc^2}{2\pi mc^2}\,\frac{1}{\left(\frac{T}{mc^2}+\frac{mc^2}{mc^2}\right)}$$

$$= \frac{qBc^2}{2\pi E_0(x+1)}$$

c) <u>Rayon de l'orbite d'extraction</u> R_{ext} tel que $x = x_{ext} = \dfrac{T_{ext}}{mc^2}$

$T_{ext\,p} = 600$ MeV ; $E_{0\,proton} = m_p c^2 = 939{,}4$ MeV

$$\rightarrow \quad R_{ext} = \frac{E_{0\,proton}}{qBc}\sqrt{x_{ext}^2 + 2x_{ext}}$$

avec $E_{0\,proton} = 939{,}4\ MeV$
$q = 1{,}6\,10^{-19}\ C$
$B = 1{,}8\ T$
$c = 3\,10^{8}\ m/s$
$x_{ext} = 0{,}6387$

AN : $R_{ext} = 2{,}26\ m$

Fréquences ν_i et ν_f en début et fin d'accélération

- ν_i tel que $x = 0$ $\Rightarrow$ $\nu_i = \dfrac{qBc^2}{2\pi E_0}$ $\Rightarrow$ AN : $\nu_i = 27{,}45\ MHz$
- ν_f à la fin du cycle tel que $x = x_{ext} = 0{,}6387$

$$\Rightarrow \nu_f = \frac{qBc^2}{2\pi E_0 (x+1)} \Rightarrow \text{AN : } \nu_f = 16{,}75\ MHz$$

2) Nombres de tours et cycle d'accélération (durée)

$V_m = 12\ kV$; $\varphi = \pi/6$. (le paquet de particules reste groupé)
les ⊕ en avance ⊖ accélérés que les ⊕ en retard

Nbre de tours → 2 accélérations à chaque tour. $\Rightarrow \underbrace{\Delta T}_{\text{variation d'énergie cinétique}} = 2q\,V_m \cos\varphi$

soit en eV pour un tour $\quad \Delta T(eV) = 2\,V_m \cos\varphi \quad$ AN : $\Delta T = 2 \times 12\,10^3 \cos\pi/6$
$= 20{,}78\ keV$

$0 \rightarrow 600\ MeV$: nombre de tours $\Rightarrow N = \dfrac{600\,10^3}{20{,}78} \simeq 28868$ tours

Durée d'1 tour → fréquence moyenne $\bar{\nu} = \dfrac{\nu_i + \nu_f}{2} \sim 22{,}1\ MHz$

d'où durée d'un cycle $\tau = \dfrac{N}{\bar{\nu}} \Rightarrow$ AN : $\tau = 1{,}3\ ms$

Solution

1° — a)

Soient (R) le référentiel terrestre, et (R') le référentiel lié à l'observateur.

• Désignons par (x_A, y_A) et (x_B, y_B) les coordonnées des extrémités A et B du camion, dans (R) ; on a :

$$y_B - y_A = L \sin\theta \qquad (1)$$

et

$$L = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \qquad (2)$$

• Désignons par (x'_A, y'_A) et (x'_B, y'_B) les coordonnées de A et B dans (R') *à un même instant* t' ; on a :

$$y'_B - y'_A = L' \sin\theta'_0 \qquad (3)$$

et

$$L' = \sqrt{(x'_B - x'_A)^2 + (y'_B - y'_A)^2} \qquad (4)$$

• D'après les transformations de Lorentz, on a, en posant

$$\Gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$x_B - x_A = \Gamma(x'_B - x'_A), \quad \text{car} \quad \Delta t' = 0 \qquad (5)$$

et

$$y_B - y_A = y'_B - y'_A \qquad (6)$$

• D'après les relations (1), (3) et (6), on obtient :

$$L\sin\theta = L'\sin\theta'_0, \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{L'}{L} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta'_0}}$$

• La relation (4) s'écrit, d'après (5) et (6),

$$L' = \sqrt{(1-\beta^2)(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

soit

$$L' = \sqrt{(1-\beta^2)L^2\cos^2\theta + L^2\sin^2\theta}$$

ou

$$\boxed{\frac{L'}{L} = \sqrt{1-\beta^2\cos^2\theta}} \qquad (7)$$

Il y a donc contraction de longueur dans le rapport $\sqrt{1-\beta^2\cos^2\theta}$.

1° — b)

On a : $\quad \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad$ et $\quad \operatorname{tg}\theta'_0 = \dfrac{y'_B - y'_A}{x'_B - x'_A}$,

donc

$$\frac{\operatorname{tg}\theta'_0}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{y'_B - y'_A}{y_B - y_A} \cdot \frac{x_B - x_A}{x'_B - x'_A} = \Gamma$$

d'après (5) et (6),

soit

$$\boxed{\frac{\operatorname{tg}\theta'_0}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} \quad ; \quad \text{donc} \quad \theta'_0 > \theta$$

2° Dans (R), la vitesse $\vec{v}$ de déplacement du camion fait l'angle θ avec Ox : $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{v_y}{v_x}$ et, dans (R'), la vitesse $\vec{v}'$ fait l'angle θ' avec Ox : $\operatorname{tg}\theta' = \dfrac{v'_y}{v'_x}$. D'après la loi de composition des vitesses,

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{v_x u}{c^2}} = \frac{v\cos\theta - \beta c}{1 - \dfrac{\beta v\cos\theta}{c}}$$

et

$$v'_y = \frac{v_y}{\Gamma\left(1 - \dfrac{v_x u}{c^2}\right)} = \sqrt{1-\beta^2} \cdot \frac{v\sin\theta}{1 - \dfrac{\beta v\cos\theta}{c}}$$

donc

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta' = \frac{\sqrt{1-\beta^2} \cdot v\sin\theta}{v\cos\theta - \beta c}}$$

3° — a)

• Dans (R'), la trajectoire est verticale si $\theta' = \pi/2$, soit

$$v\cos\theta - \beta c = 0 \quad \text{ou} \quad \boxed{u = v\cos\theta} \qquad (8)$$

• La vitesse v' du camion se réduit alors à sa composante verticale

$v' = v'_y = \sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}} \; \dfrac{v\sin\theta}{1 - \dfrac{uv\cos\theta}{c^2}}$ et, compte tenu de (8), on obtient

$$\boxed{v' = \frac{v\sin\theta}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2\cos^2\theta}{c^2}}}} \qquad (9)$$

3° — b)

Les chemins parcourus par le camion, mesurés dans (R) et (R'), sont respectivement $\ell = vt$ et $\ell' = v't'$; on en déduit $\frac{t'}{t} = \frac{\ell'}{\ell} \cdot \frac{v}{v'}$.

Or, d'après (7) et (8), $\frac{\ell'}{\ell} = \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{v^2\cos^2\theta}{c^2}}$ et

$\frac{v}{v'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2\cos^2\theta}{c^2}}}{\sin\theta}$ d'après (9) ; on en déduit :

$$\boxed{t' = t \cdot \frac{\sqrt{1 - v^2\cos^2\theta/c^2}\,\sqrt{1 - v^2\cos^4\theta/c^2}}{\sin\theta}}$$

12 – CROISEMENT DE DEUX FUSEES

1° Deux fusées F_1 et F_2, de même longueur propre ℓ, se déplacent dans des directions opposées, avec les vitesses constantes de valeurs algébriques $v_1 = \beta_1 c$ et $v_2 = -\beta_2 c$ par rapport à un référentiel galiléen (R), avec $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 > 0$. On désignera par (R_1) et (R_2) les référentiels galiléens liés à chacune des fusées F_1 et F_2. On admet que les têtes des fusées se croisent à l'abscisse commune de (R), (R_1) et (R_2) à l'instant zéro où on synchronise les horloges de ces trois référentiels. Déterminer :

a) en fonction de ℓ, β_1, β_2 l'intervalle de temps entre les instants où les têtes puis les queues des fusées se croisent, dans chacun des référentiels (R_1), (R_2) et (R).

b) l'abscisse du point de croissement des queues des fusées dans (R).

2° *Application* : déterminer l'heure et l'abscisse du croisement des queues des fusées dans les cas particuliers :

a) $v_1 = -v_2$

b) $v_1 = -3v_2$

3° La fusée F_2 est maintenant fixe dans le référentiel (R), la tête à l'abscisse O et la queue à l'abscisse ℓ. A l'instant 0 où on synchronise les horloges de (R) et (R_1), les têtes des fusées coïncident à l'origine des référentiels.

a) Déterminer dans (R), puis dans (R_1), en fonction de ℓ et v_1, l'heure des évènements :

– rencontre de la tête de F_1 et de la queue de F_2

– rencontre de la tête de F_2 et de la queue de F_1. Conclusion ?

b) Déterminer, en fonction de v_0, la vitesse v_1 de la fusée F_1 pour que les deux évènements précédents soient simultanés par rapport à un observateur lié à une fusée F_0, se déplaçant à la vitesse v_0 le long de l'axe Ox, et se trouvant en O à l'instant zéro.

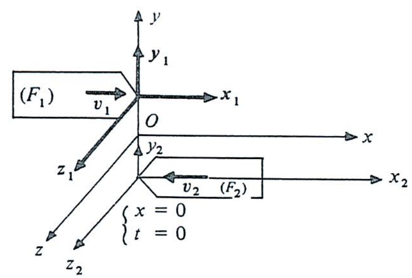

Figure I,15

Solution

1° – a)

Soit $x'x$ la direction commune de déplacement des fusées, dans (R).

• L'évènement "croisement des têtes" a pour coordonnées $[x = 0, t = 0]$ dans les 3 référentiels (R), (R_1) et (R_2).

• L'évènement "croisement des queues" a pour coordonnées $[x, t]$ dans (R), $[x_1 = -\ell, t_1]$ dans R_1 et $[x_2 = \ell, t_2]$ dans (R_2), avec $t_1 = t_2$ par raison de symétrie (fusées de même longueur).

• Les formules de passages de Lorentz de (R_1) et de (R_2) à (R) donnent l'heure t de croisement des queues dans (R) :

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\left(t_1 + \frac{v_1}{c^2}x_1\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}}\left(t_2 + \frac{v_2}{c^2}x_2\right),$$

soit
$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\left(t_1 - \frac{\beta_1}{c}\ell\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}}\left(t_2 - \frac{\beta_2}{c}\ell\right) \qquad (1)$$

• D'après (1), l'intervalle de temps entre les instants de croisement des queues et des têtes des fusées est, dans (R_1) et (R_2),

$$t_1 = t_2 = \frac{\ell}{c}\,\frac{\beta_1\sqrt{1-\beta_2^2} - \beta_2\sqrt{1-\beta_1^2}}{\sqrt{1-\beta_2^2} - \sqrt{1-\beta_1^2}}$$

ou, après simplification,

$$\boxed{t_1 = t_2 = \frac{\ell}{c}\cdot\frac{1 + \beta_1\beta_2 + \sqrt{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)}}{\beta_1 + \beta_2}} \qquad (2)$$